

# INTEGRAZIONE DI UNA FUNZIONE $f(x)$

1

DEFINIAMO UNA FUNZIONE CHE MISURI QUEST'AREA, E LA CHIAMIAMO  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ .

$F(x)$  E' DETTA FUNZIONE INTEGRALE (O FUNZIONE PRIMITIVA di  $f(x)$ ).

$f(x)$  E' LA FUNZIONE INTEGRANDA.

PER  $F(x)$ ,  $x \in [a, b]$ . QUINDI

$F(x)$  E' L'AREA SOTTESA ALLA FUNZIONE  $f(x)$  TRA  $a$  E  $x \in [a, b]$ .  $F(a) = 0$ , PERCHE'  $F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$ .

$$F(b) = \int_a^b f(t) dt.$$

## TEOREMA DEL VALOR MEDIO (DI LAGRANGE)

DATA UNA FUNZIONE INTEGRABILE  $f(x)$  NELL'INTERVALLO  $[a, b]$ , ESISTE UN PUNTO  $c \in (a, b)$  TALE CHE

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

ESISTE UN PUNTO  $c$  NELL'INTERVALLO TALE CHE  $f(c)$  È IL RAPPORTO TRA L'AREA SOTTO  $f(x)$  IN  $[a, b]$  E LA LUNGHEZZA DELL'INTERVALLO,  $b-a$ .

## TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE (TORRICELLI-BARROW)

DATA UNA  $f(x)$  INTEGRABILE SU UN INTERVALLO  $[a, b]$ , LA SUA PRIMITIVA  $F(x)$  È DERIVABILE SU TUTTO  $[a, b]$ , E  $F'(x) = f(x)$ .

Quindi 
$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

DIMOSTRAZIONE: DATA  $x \in (a, b)$ ,  $F'(x)$  È (SE ESISTE).

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{\int_a^x f(t) dt} + \int_x^{x+h} f(t) dt - \cancel{\int_a^x f(t) dt}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} \end{aligned}$$

MA L'INTERVALLO  $[x, x+h]$  HA LUNGHEZZA  $x+h - x = h$ .

Quindi, PER IL TEOREMA DI LAGRANGE,  $\exists x^* \in [x, x+h]$ , TALE CHE  $f(x^*) = \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h}$ . SE  $h \rightarrow 0 \Rightarrow x^* \rightarrow x$ ,  $f(x) = F'(x)$ . ■

LA FUNZIONE INTEGRANDA  $f(x)$  È LA DERIVATA DELLA FUNZIONE PRIMITIVA  $F(x)$ .